

# GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את  
סודות ההצלחה בלימודים

## תוכן עניינים

3	פרק 1 – משוואות מסוגים שונים
12	פרק 2 – אי-שוויונים מסוגים שונים
15	פרק 3 - גבול של פונקציה
19	פרק 4 - גזירה של פונקציה
22	פרק 5 - הגדרת הנגזרת

## פרק 1 – משוואות מסוגים שונים

### משוואה ממעלה ראשונה

- בסרטון זה מוסבר מהי משוואה.

1. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $6x + 2 = 8$       ב.  $7 - 2x = 7$       ג.  $2x + x = 24$

ד.  $2x + 6 = 8 + x$       ה.  $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$       ו.  $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$

ז.  $2 - 5x + 7 = -3x + 8$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $3(x - 1) - 4 = 2$       ב.  $7x - 4(3 - 4x) = -x$       ג.  $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$

ד.  $5x - (3x - 7)4 = 21$       ה.  $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$       ו.  $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$

### פתרונות

1. א.  $x = 1$       ב.  $x = 0$       ג.  $x = 8$       ד.  $x = 2$       ה.  $x = 2$       ו.  $x = -3$       ז.  $x = \frac{1}{2}$       ח.  $x = 3$

ב.  $x = \frac{1}{2}$       ג.  $x = 2\frac{1}{4}$       ד.  $x = 1$       ה.  $x = 4$       ו.  $x = -1$

### שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

1. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$       ב.  $\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases}$       ג.  $\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$

ד.  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$       ה.  $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$

ב.  $\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

5. פתור את המשוואות הבאות:

$$5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad \text{ב.}$$

$$6(x-2) = 2x + 5 + 4x \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 2(x-y) + 4y = 1+x \\ 2-7y+x = 3(x-y) \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ 4x+8y = 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

6. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x+3y = 5 \\ x-3y = 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

## פתרונות

- 1) א.  $(2,5)$  ב.  $(4,-2)$  ג.  $(0,1)$  ד.  $(-2,3)$  ה.  $(-7,-10)$  ו.  $x = -3$  ז.  $x = \frac{1}{2}$
- 2) א.  $(6,5)$  ב.  $(7,1)$  ג.  $(7,2)$  3) א.  $(1,1)$  ב.  $(-3,1)$  ג.  $(1,1)$  4) א.  $(-1,-3)$  ב.  $(2,10)$
- ג.  $(-2,4)$  5) א. אין פתרון ב. אינסוף פתרונות ג. אין פתרון למערכת המשוואות ד. אינסוף פתרונות 6) א.  $\left(4, \frac{1}{3}\right)$  ב.  $\left(-\frac{4}{5}, 9\right)$

## משוואה ממעלה שנייה

1. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $x^2 - 36 = 0$       ב.  $32x^2 - 18 = 0$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $-7x^2 - 14x = 0$       ב.  $5x^2 - x = 0$

3. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$       ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$   
ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$       ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

4. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 3$       ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$   
ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

## פתרונות

(1) א.  $x = \pm 6$       ב.  $x = \pm \frac{3}{4}$       (2) א.  $x_1 = 0, x_2 = -2$       ב.  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$   
(3) א.  $x_1 = 2, x_2 = -5$       ב.  $x_1 = 2, x_2 = 8$       ג.  $x = \frac{2}{5}$       ד. אין פתרון למשוואה  
(4) א.  $x_1 = 0, x_2 = 1$       ב.  $x_1 = -1, x_2 = -1\frac{1}{4}$       ג.  $x_1 = 1, x_2 = -10$

## משוואות עם מכנה

1. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$       ב.  $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$   
ג.  $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$       ד.  $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$

$$5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2 \quad \text{ה.}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0 \quad \text{א.}$$

$$\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x} \quad \text{ה.}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15} \quad \text{א.}$$

$$\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0 \quad \text{ג.}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0 \quad \text{ג.}$$

### פתרונות

- 1 א.  $x=-18$  ב.  $x=-30$  ג.  $x=-1$  ד.  $x=1$  ה.  $x=-10$  ו.  $x=-21$  ז.  $x=8$  ח.  $x=-7$   
 2 א.  $x=-7$  ב.  $x=-6$  ג.  $x=-7$  ד.  $x=-3$  ה.  $x=-2$  ו.  $x=2$  ז.  $x=2$  ח.  $x=2$   
 3 א.  $x_1=2, x_2=-1.2$  ב.  $x=5, x \neq -3$  ג.  $x_1=0, x_2=-5$  ד.  $x=6, x \neq 3$

## משוואות ממעלה שלישית ומעלה

1. פתור את המשוואה  $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ .

2. פתור את המשוואה  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ .

3. פתור את המשוואה  $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ .

4. פתור את המשוואה  $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$ .

## פתרונות

(1)  $x = \pm 1$  (2)  $x = \pm 1$  (3)  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$  (4)  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2\frac{1}{2}$

## משוואות מעריכיות

- בסרטון זה הסבר על חוקי החזקות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות עם חיבור וחסור.

פתור את המשוואות הבאות:

1.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

3.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

4. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $3^x = 5^x$       ב.  $5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2x}{3}-2}$



5. פתור את המשוואה  $e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

6. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$       ב.  $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

7. פתור את המשוואה  $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

8. פתור את המשוואה  $e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1$

9. פתור את המשוואה  $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

10. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$       ב.  $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

11. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$       ב.  $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

12. פתור את המשוואה  $e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$

### פתרונות

(1)  $x=1$  (2)  $x=-2$  (3)  $x=-\frac{1}{2}$  (4)  $x=0$  (5)  $x=3$  (6)  $x_1=1, x_2=\frac{1}{6}$  (7)  $x=1$  (8)  $x=-1$  (9)  $x=\pm 1$  (10)  $x=0$  (11)  $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$  (12)  $x=\pm 1$

(1)  $x=1$  (2)  $x=-2$  (3)  $x=-\frac{1}{2}$  (4)  $x=0$  (5)  $x=3$  (6)  $x_1=1, x_2=\frac{1}{6}$  (7)  $x=1$  (8)  $x=-1$  (9)  $x=\pm 1$  (10)  $x=0$  (11)  $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$  (12)  $x=\pm 1$

## משוואות לוגריתמיות

- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלוגריתמים.
- בסרטונים 2-4 הסבר על כללי הלוגריתמים.
- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלן.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 1.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 2.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 3.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 4.

1. מצא את ערכו של  $x$  :

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x + 4) = 2$

ז.  $\ln x = 2$       ח.  $\ln x = -\frac{1}{2}$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\log_x (x^2 + 6x) = 3$       ב.  $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

3. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\log_5 (25^x - 20) = x$       ב.  $\ln \left( e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$

4. פתור את המשוואה  $\log_4 x + \log_x 4 = 2\frac{1}{2}$ .

5. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $\log x \cdot \log (10x) = 2$       ב.  $\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2)$

6. פתור את המשוואות הבאות:

א.  $x^{\log_5 x} = \frac{25}{x}$       ב.  $x^{\ln x} = e^6 x$

7. מצא את ערכו של  $x$ :

א.  $2^x = 5$       ב.  $5^x = 8$   
 ג.  $e^x = 2$       ד.  $e^x = \frac{1}{2}$   
 ה.  $e^x = -1$

8. פתור את המשוואה  $x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x}$ .

9. פתור את המשוואה  $\frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$

10. פתור את המשוואה  $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

### פתרונות

1 א.  $x = \frac{1}{2}$       ב.  $x = 65,536$       ג.  $x = 27$       ד.  $x = 4$       ה.  $x = 5$       ו.  $x = 4$       ז.  $x = e^2$

ח.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$       2 א.  $x = 3$       ב.  $x = 3$       3 א.  $x = 1$       ב.  $x = 0$       4  $x_1 = 16, x_2 = 2$

5 א.  $x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = 10$       ב.  $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, x_2 = \frac{1}{e}$       6 א.  $x_1 = \frac{1}{25}, x_2 = 5$

ב.  $x_1 = e^3, x_2 = \frac{1}{e^2}$       7 א.  $x = 2.322$       ב.  $x = 1.292$       ג.  $x = 0.693$       ד.  $x = -0.693$

ה. אין פתרון      8  $x_1 = 16, x_2 = \frac{1}{4}$       9  $x = 3$       10  $x_1 = \sqrt{e}, x_2 = e$

## פרק 2 – אי-שוויונים מסוגים שונים

### אי-שוויונים

- בסרטונים 1-5 מוסבר מהו אי שוויון.

### אי-שוויון ממעלה ראשונה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} 45x - 26 > 109 & .1 \\ 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) & .3 \\ \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} & .5 \\ \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x & .7 \\ 6x > 2(3x-1) & .2 \\ (x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 & .4 \\ 4(6x-8) < 8(3x-4) & .6 \\ \frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 & .8 \end{array}$$

### פתרונות

$$(1) x > 3 \quad (2) \text{ כל } x \quad (3) \text{ אף } x \quad (4) x > -2 \quad (5) x < 5 \quad (6) \text{ אף } x \quad (7) x \geq 12 \quad (8) x > -13$$

### אי-שוויון ממעלה שנייה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} x^2 < 144 & .1 \\ (x+2)(x+5) < 0 & .3 \\ -x^2 + 13x + 30 < 0 & .5 \\ (x-5)^2 + x(x+2) < 89 & .7 \\ x^2 - 12x > -32 & .2 \\ (x+2)(x+4) < 35 & .4 \\ x^2 - 10x + 25 > 0 & .10 \\ 2x^2 + 2x + 24 \geq 0 & .12 \\ (x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x & .11 \end{array}$$

### פתרונות

- (1)  $-12 < x < 12$  (2)  $x > 8$  או  $x < 4$  (3)  $-5 < x < -2$  (4)  $-9 < x < 3$  (5)  $x > 15$  או  $x < -2$   
(6)  $x \geq 11$  או  $x \leq 7$  (7)  $-4 < x < 8$  (8)  $-4 \leq x \leq 0$  (9)  $0 < x < 4$  (10)  $x < 5$  או  $x > 5$   
(11)  $x > 5$  או  $x < 3$  (12) כל  $x$

### אי-שוויון ממעלה שלישית

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$            | 2. $x(x^2 + x + 1) > 0$             |
| 3. $(-2x^2 - 3x + 2)(x + 1) \leq 0$ | 4. $x^3 - 25x \geq 0$               |
| 5. $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$      | 6. $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ |
| 7. $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$       | 8. $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$         |
| 9. $(x^2 + 6)(x + 3) > 0$           | 10. $(x - 2)(x - 4)(x - 1) < 0$     |

### פתרונות

- (1)  $x > 3$  או  $1 < x < 2$  (2)  $x > 0$  (3)  $x \geq \frac{1}{2}$  או  $-2 \leq x \leq -1$  (4)  $x \geq 5$  או  $-5 \leq x \leq 0$   
(5)  $x > 2$  (6)  $x \leq 1\frac{2}{3}$  (7)  $1 < x < 3$  או  $x < -2$  (8)  $x = 3$  או  $x \leq 0$  (9)  $x > -3$  (10)  $2 < x < 4$   
או  $x < 1$

### אי-שוויון עם מנה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                              |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\frac{x-1}{x^2-9} > 0$   | 2. $\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$    |
| 3. $\frac{1}{x^2-16} > 0$    | 4. $\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ |
| 5. $\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ | 6. $\frac{1}{-3(x-1)} < 0$       |

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} < 0 \quad .8$$

$$\frac{x-1}{x+2} \leq 1 \quad .7$$

$$\frac{1}{x^2 - 8x + 12} \geq 0 \quad .10$$

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{-x^2 + 3x - 7} \geq 0 \quad .9$$

### פתרונות

$$2 < x < 3 \text{ או } x > 3 \quad (4) \quad x < -4 \text{ או } x > 4 \quad (3) \quad x < -\frac{2}{3} \text{ או } x \geq \frac{1}{2} \quad (2) \quad -3 < x < 1 \text{ או } x > 3 \quad (1)$$

$$x < 2 \text{ או } x > 6 \quad (10) \quad 1 \leq x \leq 6 \quad (9) \quad 2 < x < 3 \quad (8) \quad x > -2 \quad (7) \quad x > 1 \quad (6) \quad \frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

### מערכת וגם

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad .2$$

$$3 < x+1 < 5 \quad .1$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad .4$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad .3$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad .6$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad .5$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad .8$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad .7$$

### פתרונות

$$x \geq 10 \quad (6) \quad -\frac{5}{3} \leq x \leq 7 \quad (5) \quad x < 2\frac{2}{5} \text{ או } x > 2\frac{2}{3} \quad (4) \quad x > 0 \quad (3) \quad x > -3\frac{1}{2} \quad (2) \quad 2 < x < 4 \quad (1)$$

$$\phi \quad (8) \quad 1 \leq x \leq 13 \quad (7)$$

## פרק 3 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה) :

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים ( $x$  שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר  $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$



(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת):

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

**הערה חשובה מאוד!**

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות (ראה פרק 8). בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

## פתרונות

									<b>(1)</b>
					40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1	
									<b>(2)</b>
					$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1	
									<b>(3)</b>
		$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$\frac{-1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	
									<b>(4)</b>
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	
									<b>(5)</b>
0 (9	$\phi$ (8	$\infty$ (7	$\infty$ (6	$-\infty$ (5	$\phi$ (4	$-\infty$ (3	$\phi$ (2	$\phi$ (1	
						$-\infty$ (12	$\phi$ (11	1 (10	
									<b>(6)</b>
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	
									<b>(7)</b>
$e$ (9	$e^{30}$ (8	$e^{-12}$ (7	$e$ (6	$e^3$ (5	$e^{-1}$ (4	$e^2$ (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	
									<b>(8)</b>
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	
								0 (10	
									<b>(9)</b>
					-1 (5	1 (4	$\phi$ (3	$\phi$ (2	4 (1

(\*\*) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים :

$$\lim = \sqrt[b]{a} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

## פרק 4 - גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת) :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

## פתרונות

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \quad f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \quad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8) \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10) \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12) \quad f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (21)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

(22)

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}}$$

(27)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right)$$

(26)

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right)$$

(28)

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

## פרק 5 - הגדרת הנגזרת

1. חשב על פי הגדרת הנגזרת, את נגזרת הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 + 4x + 1$ .
2. מצא את הנגזרת של הפונקציה הבאה, לפי נוסחת הגדרת הנגזרת:  $y = 2x^2 - 3$ .
3. מצא את הנגזרת של הפונקציה הבאה, לפי נוסחת הגדרת הנגזרת:  $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 1.5$ .
4. מצא את הנגזרת של הפונקציה  $y = 9 + 6x - 3x^2$  לפי הנוסחה להגדרת הנגזרת באמצעות גבול.
5. מצא את הנגזרת של הפונקציה  $y = 8 - x^2$ , לפי הנוסחה להגדרת הנגזרת באמצעות גבול.

חשב על פי הגדרת הנגזרת את נגזרות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (7) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (6)$$

### פתרונות

$$-2x \quad (5) \quad 6 - 6x \quad (4) \quad 2x + \frac{1}{2} \quad (3) \quad 4x \quad (2) \quad 2x + 4 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (7) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad (6)$$